Wichtige Informationen zur Klausur am 04.06.

Liebe Schülerinnen und Schüler des Mathematik-GK Reichart,

leider führt eine Kombination unterschiedlicher Ereignisse dazu, dass wir trotz ausreichend Vorlaufzeit nur äußerst wenig Unterricht in Vorbereitung der Klausur hatten bzw. haben.

Nichtsdestotrotz hilft es nichts, das zu beklagen, wir müssen uns damit arrangieren. Ich versuche, euch so gut wie möglich darzustellen, wie die Klausur nächste Woche aussehen wird, werde bei der Konzipierung natürlich die aktuelle Situation angemessen berücksichtigen, dennoch seid ihr selbst gefordert, auf mich (virtuell) zuzukommen, falls ihr Probleme während der Vorbereitung habt.

Zunächst die Themen:

- Punkte und Vektoren im dreidimensionalen Raum mit allen ihren Eigenschaften inklusive Kollinearität und Berechnung der Länge eines Vektors
- Parameterdarstellung einer Geraden, z.B. aus zwei Punkten; Punktprobe
- Lagebeziehung von Geraden, Bestimmung der Lagebeziehung z.B. durch ein lineares Gleichungssystem
- Überprüfung von Orthogonalität durch das Skalarprodukt

Alle Aufgaben können auch im Sachzusammenhang gestellt werden.

Zu allen Punkten außer dem letzten habe ich Videos erstellt, die euch beim Lernen unterstützen sollen:

https://www.youtube.com/channel/UCyvdCbHdirsBPqmICc_M1ZQ

Ein Video zur Orthogonalität folgt am kommenden Wochenende.

Fragen und Probleme sendet ihr bitte an Pascal.letmathe@rhgym-hagen.de oder 015906752207.

Als Aufgaben könnt ihr alles von Kapitel V1 bis V4 erledigen. Lösungen gebe ich auf Anfrage gern heraus.

Auch die Seiten 195 bis 201 bieten sich zur Vorbereitung an, ihr müsst nur Aufgaben, bei denen ihr einen Winkel bestimmen müsst, weglassen, diese beziehen sich nämlich auf Kapitel V5, was wir noch nicht besprochen haben.

Einen taschenrechnerfreien Teil wird es in dieser Klausur nicht geben. Bitte bringt eure GTR (nach Möglichkeit nicht im Klausurmodus) aufgeladen am Klausurtag mit. Formelsammlungen werden von der Schule gestellt.

Alle in den vergangenen zwei Wochen von euch erledigten Aufgaben wurden von mir notiert und werden an Herrn Reichart weitergeleitet. Bevor ich euch die Musterlösung zeige, möchte ich euch noch (trotz allem) viel Erfolg bei der Vorbereitung und bitte euch, eure Kursmitglieder auf die Informationen in dieser Nachricht aufmerksam zu machen.

Musterlösungen:

14 a) $z\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) Fehler im 1. Druck der 1. Auflage des Schülerbuchs. Der Schnittpunkt der Bahnen lautet S(16 | 22 | 0,5) statt S(16 | 12 | 0).

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 22 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$ hat die Lösung $t = 0{,}5$.

Der Zeppelin erreicht den Punkt S für t = 0,5, also eine halbe Stunde nach Beginn der Fahrt.

$\begin{pmatrix} 12 \\ 25 \\ 0{,}3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -80 \\ 60 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 22 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$ hat die Lösung $s = 0{,}05$.

Das Flugzeug erreicht S für s = 0,05, also 3 Minuten nach Beginn seiner Fahrt.

Starten beide zum gleichen Zeitpunkt, so kann es nicht zu einer Kollision kommen, da sie mit einer zeitlichen Differenz von 27 Minuten am Punkt S vorbeifliegen.

11 a), b) Für $b = 9$ und $d = \frac{4}{3}$ sind die Richtungsvektoren Vielfache voneinander.

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ für $r = 0{,}25$, $a = -0{,}75$ und $c = 3{,}25$.

Für diese Werte sind die beiden Geraden identisch.

b) Wählt man nun $a = -0{,}75$ und $c \in \mathbb{R} \setminus \{3{,}25\}$, so sind die beiden Geraden echt parallel zueinander.

c) $a = -0{,}75$, $b = 9$, $c = 3{,}25$, $d \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{4}{3}\}$.

d) $a = -0{,}75$, $b = 9$, $c = 3$, $d = 0$ ist eine Möglichkeit.

liegen. Dies findet ohnehin für $s < 0$ statt, also vor Beginn der Zeitmessung.

c) Die Kursvektoren sind pro Stunde gegeben, daher ist:

Geschwindigkeit Ballon:

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14} \approx 3{,}74\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

Geschwindigkeit Kleinflugzeug:

$|\vec{v}| = \sqrt{(-30)^2 + (-30)^2 + 60^2} = 90\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

d) Es werden die Annahmen gemacht, dass Ballon und Kleinflugzeug geradlinig und mit konstanter Geschwindigkeit fliegen. Dabei werden äußere Einflüsse wie Windverhältnisse nicht berücksichtigt. Die Annahmen wirken stark vereinfachend, daher wenig realistisch.

4 Zueinander orthogonale Vektoren – Skalarprodukt

Seite 189

Einstiegsproblem

Die Maße des Beets gehören nicht zu einem rechtwinkligen Dreieck.

Seite 190

1 a) Das Skalarprodukt der Richtungsvektoren ist 12. Die Geraden sind nicht zueinander orthogonal.

b) Die beiden Geraden sind zueinander orthogonal.

2 a) $b_1 = 6$ b) $a_2 = 5$ c) $b_3 = 1{,}5$

3 a) Z.B.: $h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$

b) Z.B.: $h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ -6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) Z.B.: $h\colon \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Seite 191

4 a) $r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ b) $r \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 17 \end{pmatrix}$

c) $r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$; jeweils $r \in \mathbb{R}$

5 $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$; ja, denn $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.

6 Es ist $\overline{AB} = \overline{AD} = 9$ und $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$, also gibt es ein solches Quadrat. C(9 | 6 | 8)

7 a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$;

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = \sqrt{2}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow$ Quadrat

b) $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = \sqrt{43{,}25}$;

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -4{,}75 \neq 0 \Rightarrow$ Raute

c) $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = \sqrt{50}$;

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow$ Quadrat

d) $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = \sqrt{3}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 1 \Rightarrow$ Raute

10 a) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$

d) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ und $\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{CD}^2 = \overrightarrow{DA}^2$ und $\overrightarrow{AC}^2 = \overrightarrow{BD}^2$

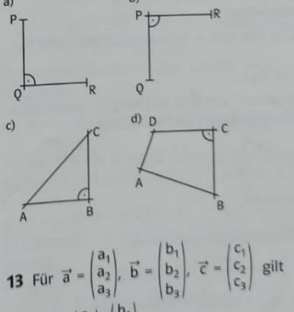
11 a) Die Ecken des Oktaeders sind:

A(3 | −3 | 0); B(3 | 3 | 0); C(−3 | 3 | 0); D(−3 | −3 | 0); E(0 | 0 | $\sqrt{18}$); F(0 | 0 | $-\sqrt{18}$).

Individuelle Überprüfungen der Beziehungen im Oktaeder, zum Beispiel:

- Alle Flächen sind gleichseitige Dreiecke:
  z. B. für Dreieck ABE: $\overline{AB} = \overline{AE} = \overline{BE} = 6$
- Je zwei der Raumdiagonalen stehen senkrecht aufeinander:
  $\overrightarrow{EF} \perp \overrightarrow{AC}$ (da $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$);
  $\overrightarrow{EF} \perp \overrightarrow{BD}$ (da $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$);
  $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$ (da $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$)
- ABCD, AFCE und EBFD sind Quadrate:
  z. B. für AFCE: $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{FC}$, $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{EC}$ und $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = 0$

12



13 Für $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ gilt

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

$= b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

$= \vec{b} \cdot \vec{a}$